

Die Messung der Dichte von Proben mit einer Dicht kleiner als 1 g/qcm

© Rudolf Schießl

Grundsätzlich handelt es sich bei allen messrelevanten Größen (Gewicht, Auftrieb) um Kräfte mit dem Formelzeichen **F** und der Maßeinheit Newton (N bzw. mN). Die Waage gibt aber Massen (Formelzeichen **m**) in Gramm (g bzw. mg) an. Die Umrechnungen erfolgen nach den beiden Formeln:

$$(1) \cdot F = m \times g \quad \text{bzw.:} \quad m = F \div g, \quad \text{wobei } g \text{ die Fallbeschleunigung ist.}$$

Wir wollen in dieser Abhandlung aber nur die Anzeigen der Waage in g verwenden.

Es werden folgende Bezeichnungen vereinbart:

P steht für Probe (Farbe in den Grafiken: dunkler Blauton)

G steht für Gewicht (Farbe in den Grafiken: gelb-bräunlich)

A steht für Auftrieb, A_P für den Auftrieb der Probe, analog A_G für den Auftrieb des Gewichts

m1=erstes Messergebnis in g (mg)

m2=zweites Messergebnis in g (mg)

m3=drittes Messergebnis in g (mg)

Zum besseren Verständnis benutzen wir Beispielmessungen mit folgenden **Proben- bzw. Gewichtswerten:**

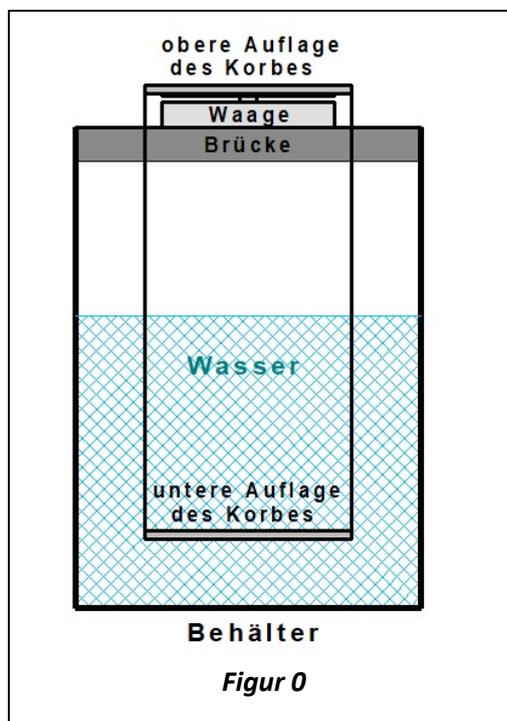
Gewicht G mit der Masse $m_G=500\text{g}$ und der Dichte $\rho=8\text{ g/cm}^3$ (Eisen hat die Dichte $\rho=7,8\text{ g/cm}^3$)

Probe P mit einer angenommenen Masse $m_P=400\text{g}$ und der Dichte $\rho=0,8\text{ g/cm}^3$.

Die in den Grafiken verwendeten Zahlenwerte beziehen sich auf diese Beispiele!

Die folgende **Figur 0** zeigt den grundsätzlichen Versuchsaufbau mit dem Wasserbehälter und der Brücke, auf der sich die Feinwaage befindet. Oben ist auf der Waage ein sogenannter „Korb“ eingehängt. Dieser hat ein obere glatte Kunststoffauflage und eine untere, sich im Wasser befindliche Auflage, aus einem Edeltstahlgitter bestehend. Obere und untere Auflager sind durch Edelstahlgewindestangen verbunden.

Beim Einbringen des Gewichts G und anschließend der Probe P steht jeweils der Wasserspiegel um den Wert an, der dem Volumen des jeweiligen Körpers entspricht.



Die drei nachfolgenden Abbildungen **Figur 1**, **Figur 2** und **Figur 3** beschreiben die drei Messungen mit den Beispielwerten.

Die farbigen vertikalen Pfeile symbolisieren die auftretenden Kräfte. Die roten Pfeile symbolisieren die resultierende Gesamtkraft, die (siehe oben) als Masse in g angezeigt wird.

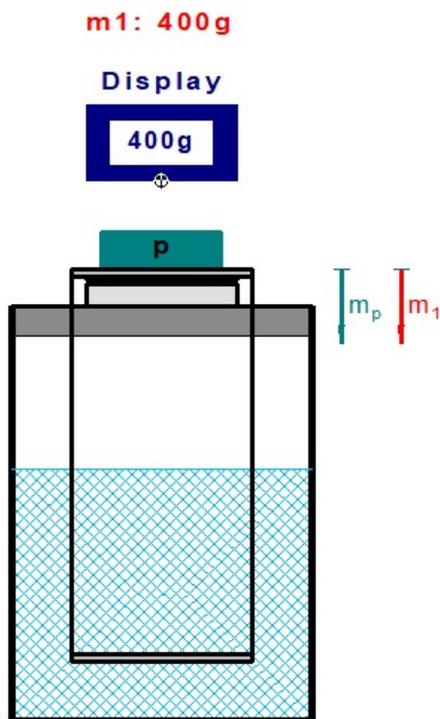


Fig. 1

Messung 1:

Die Dichte eines Körpers ist definiert als Quotient aus der Masse m und dem Volumen V :

$$(2) \quad \rho := \frac{m}{V} \Rightarrow \quad m = \rho \cdot V \quad V = \frac{m}{\rho}$$

Grundsätzlich gilt: Nach dem Prinzip von Archimedes erfährt ein vollständig in ein Medium (Flüssigkeit oder Gas) eingetauchter Körper eine Auftriebskraft A , die der Gewichtskraft des Volumens des verdrängten Mediums (Flüssigkeit oder Gas) entspricht.

Um die zwei unbekannt Dichtewerte und Volumina in Gleichung (1) zu bestimmen, sind (bei Körpern mit einer Dichte größer als 1g/cm^3) zwei Messungen erforderlich. Wenn es nicht auf extreme Genauigkeit ankommt, kann man dabei den Auftrieb im Medium Luft vernachlässigen.

Sollte kein **Kalibriergewicht** mit definiertem Gewicht vorhanden sein, dann muss man zuerst das Gewicht des Gewichtstücks G (Beispiel: $m_G = 500\text{g}$) bestimmen.

Bei der ersten Messung schaltet man die Waage ein und legt dann die Probe P auf die obere Auflage. Damit bestimmt man deren Gewicht m_1 .

Für unser Beispiel gilt: $m_1 = m_P = 400\text{g}$

Der blaue und der rote Pfeil sind gleich lang und zeigen nach unten, drücken also mit 400g auf die Waage.

m2: 437,5g + 400g = 837,5g

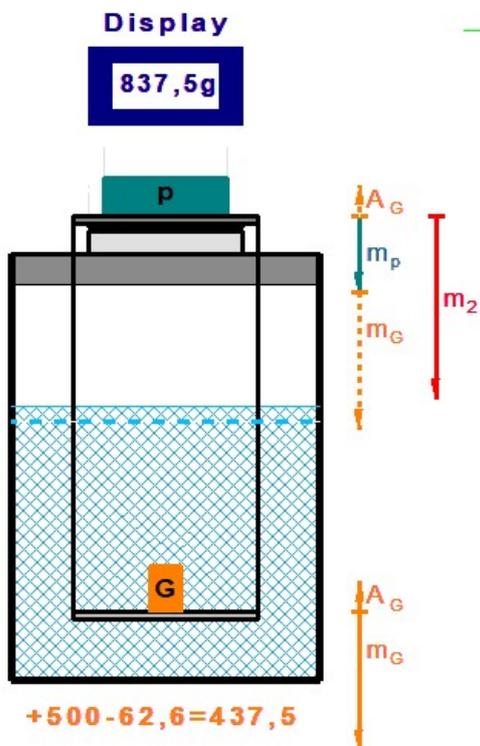


Fig. 2

Messung 2:

Nach der ersten Messung (die Waage bleibt eingeschaltet) legt man das Gewichtstück G ins Wasserbad auf die untere Korbablage. Wegen des Auftriebs, den das Gewichtstück im Wasser erfährt, zeigt die Waage nun aber nicht die Summe aus dem Gewicht der Probe ($m_P = 400\text{g}$) und dem Gewicht des Gewichtstück G ($m_G = 500\text{g}$) an, da das Gewichtstück G einen Auftrieb A_G erfährt. Die Waage zeigt somit nur

$$(3) \quad m_2 = m_P + m_G - A_G \quad \text{an.}$$

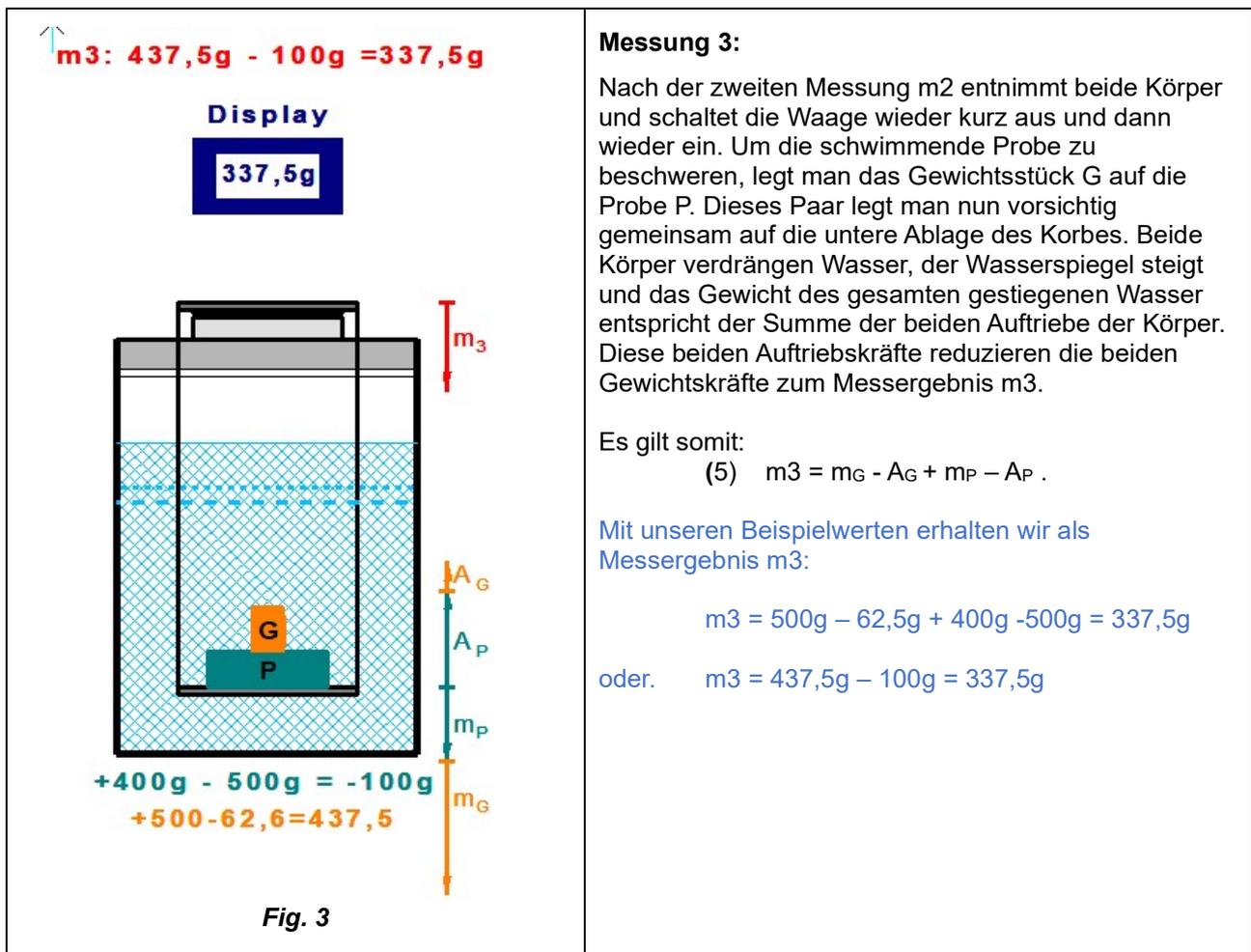
Da Wasser die Dichte 1g/cm^3 hat, ist die Maßzahl des Volumens des durch das Gewicht verdrängten Wassers gleich der Maßzahl des Auftriebs A_G . Nach der Formel (2) ergibt sich somit:

Beispiel: $m_P = 400\text{g}, m_G = 500\text{g}$

$$(4) \quad A_G = \frac{m_G}{\rho_G} \quad \text{Beispiel: } A_G = \frac{500}{8} = 62,5 \text{ in g}$$

Somit ist das Messergebnis m_2 für unser Beispiel:

$$m_2 = 400\text{g} + 500\text{g} - 62,5\text{g} = 837,5\text{g}$$



Kommen wir nun zur Berechnung der Dichte ρ der Probe.

Für die Dichte der Probe gilt:

$$(6) \quad \rho := \frac{m}{V} = \frac{m_P}{V_P} = \frac{m_1}{m_2 - m_3} = \frac{m_1}{[m_P + m_G - A_G] - [(m_G - A_G) + (m_P - A_P)]}$$

Wie man sieht, kürzen sich im Nenner alle Werte bis auf A_P weg.

$$(7) \dots \rho := \frac{m_1}{m_P + m_G - A_G - m_G + A_G - m_P + A_P} = \frac{m_1}{A_P} = \frac{m_P}{V_P}$$

Das letzte Gleichheitszeichen von Gleichung (7) ergibt sich aus der Tatsache, dass die Maßzahl des Auftriebs gleich der Maßzahl des Volumens der Probe ist. Siehe hierzu den Artikel auf unserer Homepage:

<https://aurum-proofx.de/wissen/edelmetallpruefung-durch-dichtebestimmung/>

Damit ist bewiesen, dass $\rho := \frac{m_1}{m_2 - m_3}$ tatsächlich zur Bestimmung der Dichte der Probe geeignet ist.

Hinweis:

Auf <https://aurum-proofx.de/wissen/edelmetallpruefung-durch-dichtebestimmung/> findet man eine sechsseitige pdf-Datei, bei der auf mögliche Fehler bei einer sehr genauen Dichtemessung, wie sie bei kleinen Edelmetallproben nötig ist, eingegangen wird. Dies ist aber hier nicht relevant.